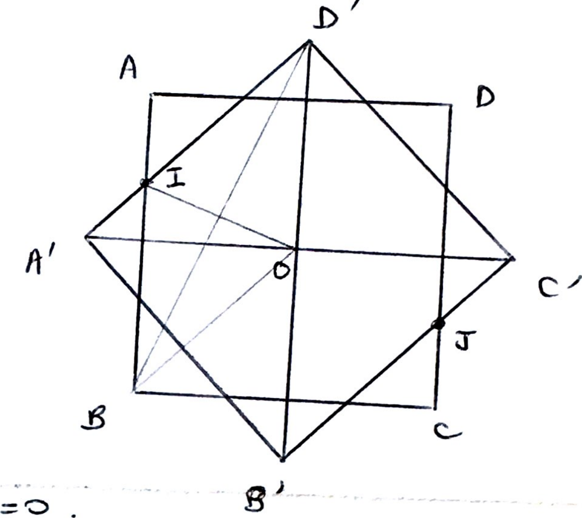
On considère un carré ABCD de sens direct et de centre O. Soit A'B'C'D' le carré transformé de ABCD par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1) Quel est son centre ?

2) Soit f une isométrie transformant {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}. Mq $f(O) = O$. En déduire toutes les isométries f.

1) r conserve les barycentres, donc O bary. de ABCD sera transformé en $O = r(O)$ bary. de ABCD



2) Soit $\mathcal{G}$ l'ens. des isom. du plan transformant {A, B, C, D} en {A', B', C', D'}.
Si $f \in \mathcal{G}$, f conserve les bary. donc $f(O) = O$.
Ainsi f possède au moins un pt fixe, donc sera :

1) une rotation de centre O
ou
2) une réflexion / à droite Δ passant par O.

Cas 1) : $f(A) = A', B', C'$ ou D'. On trouve donc les 4 rotations :

$r \doteq r_{O,\frac{\pi}{4}}$ $\quad r_{O,\frac{3\pi}{4}}$ $\quad r_{O,\frac{5\pi}{4}}$ $\quad r_{O,\frac{7\pi}{4}}$

Cas 2) : f est une réflexion / à Δ. Il y a 4 cas possibles :

$f(A) = A' \Rightarrow \Delta =$ médiatrice de $[AA']$
$f(A) = B' \Rightarrow$ " $[AB']$
$f(A) = C' \Rightarrow$ etc
$f(A) = D' \Rightarrow$

(réf. Tenacher TCE 92, I, 2 p 178)

Document de Dany-Jack Mercier

Ces médiatrices s'obtiennent sur le dessin. Ainsi la médiatrice Δ de $[AA']$ sera la droite (IJ) :

preuve : * $\begin{cases} (OD') \parallel (IB) & \text{(car toutes deux perp. à } (A'C')) \\ (ID') \parallel (BD) & \text{(car } \widehat{OA'D'} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \widehat{A'OB} = \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

de plus $OB = OD'$, donc <u>$IBOD'$ est un losange</u>.

Notons s_Δ la réflexion de base (ID). On a donc : $\boxed{s_\Delta(B) = D'}$

* $\begin{cases} IA = AB - IB \\ IA' = A'D' - ID' \\ IB = ID' \\ AB = A'D' \end{cases} \Rightarrow IA = IA' \Rightarrow \boxed{s_\Delta(A) = A'}$

* On démontre de m̂ que $s_{(JO)}(B') = D$ et $s_{(JO)}(C) = C'$

* Enfin, on prouve que $(OI) = (OJ)$, ie que O, I, J sont alignés, en constatant que

$$s_O(I) = J$$

(preuve : $I \in (AB) \cap (A'D') \Rightarrow s_O(I) \in (CD) \cap (B'C') = \{J\}$)

cqfd